Eine interessante geometrische Abbildung

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck *ABC*. Wir konstruieren die äusseren Quadrate über den Seiten des Dreiecks. Die Mittelpunkte dieser Quadrate bilden wiederum ein Dreieck. Wir bezeichnen diese drei Mittelpunkte mit *R, S* und *T*.

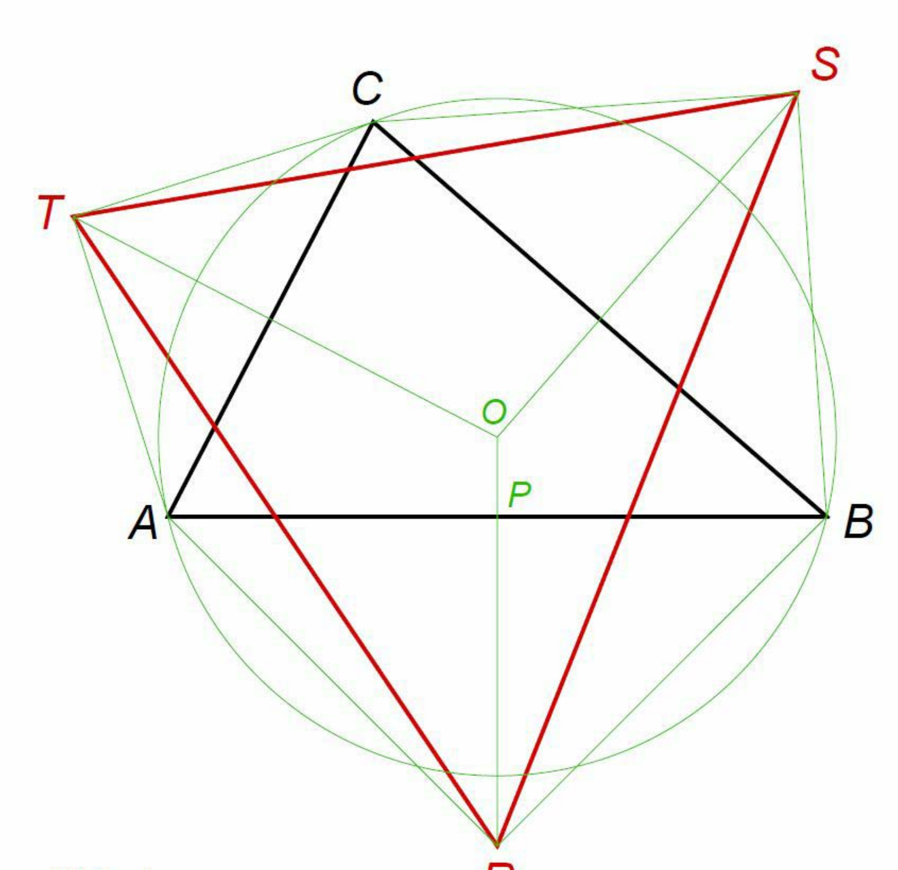

Abb. 1

Das Dreieck *RST* hat eine grössere Fläche als das Ausgangsdreieck *ABC.*

Es sei *O* irgend ein Koordinatenursprung, z.B. der Umkreismittelpunkt des Dreiecks *ABC.* Es gilt dann

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AP}$$

Mit der Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man die Beziehungen.

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}D \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}D \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}D \cdot \overrightarrow{CA}$$

Es sei $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, $R(x_R; y_R)$, $S(x_S; y_S)$, $T(x_T; y_T)$.

Dann erhält man für die Koordinaten des Punktes R :

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_A + x_B - y_A + y_B \\ x_A - x_B + y_A + y_B \end{pmatrix}$$

Und entsprechend für S und T :

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B + x_C - y_B + y_C \\ x_B - x_C + y_B + y_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_A + x_C + y_A - y_C \\ -x_A + x_C + y_A + y_C \end{pmatrix}$$

Oder zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ x_S \\ y_S \\ x_T \\ y_T \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \\ x_C \\ y_C \end{pmatrix}$$

Die Matrix $$M = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bildet eindeutig das Dreieck ABC auf das Dreieck RST ab.

Zum Beispiel wird das rechtwinklige Dreieck $A(0;0)$. $B(4;0)$; $C(0;2)$ auf das Dreieck $R(2;-2)$, $S(3;3)$, $T(-1;1)$ abgebildet und dieses Dreieck auf das Dreieck $U(5;0)$, $V(0;4)$, $W(-1;-2)$ (siehe Abb. 2)

Je öfter, dass man diese Abbildung ausführt, desto mehr ähnelt das immer grösser werdende Dreieck einem gleichseitigen Dreieck.

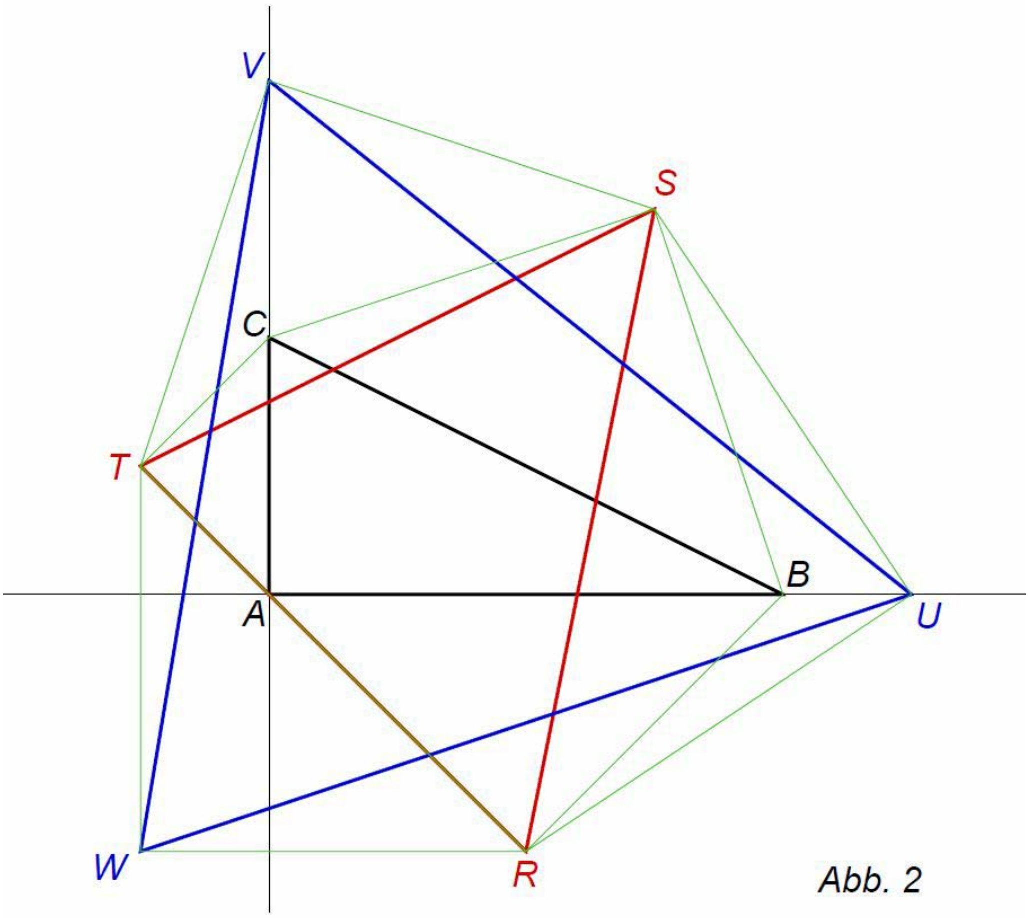

Abb. 2

Es ist kein Kunststück, zu einem gegebenen Dreieck die Mittelpunkte der äusseren Quadrate zu seinen Seiten zu konstruieren. Das Umgekehrte ist allerdings eine echte Herausforderung! Gegeben sei also ein Dreieck *RST,* dessen Ecken die Mittelpunkte der äusseren Quadrate über den Seiten eines gesuchten Dreiecks *ABC* sind.

Eine geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal war mir bis jetzt unbekannt. Jedoch lassen sich die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks *ABC* aus den Koordinaten der Punkte *R, S* und *T* berechnen. Die Vorarbeit haben wir bereits geleistet. Wir müssen nur die Inverse der Matrix

$$M = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

suchen.
Das macht man heute zum Beispiel mit MATLAB und erhält:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine sogar einfachere Matrix als die Ausgangsmatrix!

Also:
$$\left\| \begin{aligned} x_A &= y_R + x_S - y_T \\ y_A &= -x_R + y_S + x_T \\ x_B &= -y_R + y_S + x_T \\ y_B &= x_R - x_S + y_T \\ x_C &= x_R - y_S + y_T \\ y_C &= y_R + x_S - x_T \end{aligned} \right\| \qquad (*)$$

Sind speziell die Koordinaten der Punkte *R, S* und *T* ganzzahlig, so sind es auch die Koordinaten der gesuchten Punkte *A, B* und *C,* was höchst erstaunlich ist.

Angewandt auf die Punkte $U(5;0)$, $V(0;4)$, $W(-1;-2)$ des obigen Beispiels erhält man die Punkte $R(2;-2)$, $S(3;3)$, $T(-1;1)$ und aus diesen durch nochmalige Anwendung die Punkte $A(0;0)$. $B(4;0)$; $C(0;2)$, wie auch zu erwarten war.
Wendet man jedoch diese Abbildung auf das Dreieck *ABC* an, so erhält man die Punkte $X(2;0)$, $Y(0;-2)$, $Z(2;4)$. *A, B, C* sind **nicht** die Mittelpunkte der äusseren Quadrate über den Seiten des Dreiecks *XYZ*, wie die Abb. 3 zeigt, sondern die Mittelpunkte der **inneren** Quadrate über diesen Seiten. Zum gegebenen Dreieck

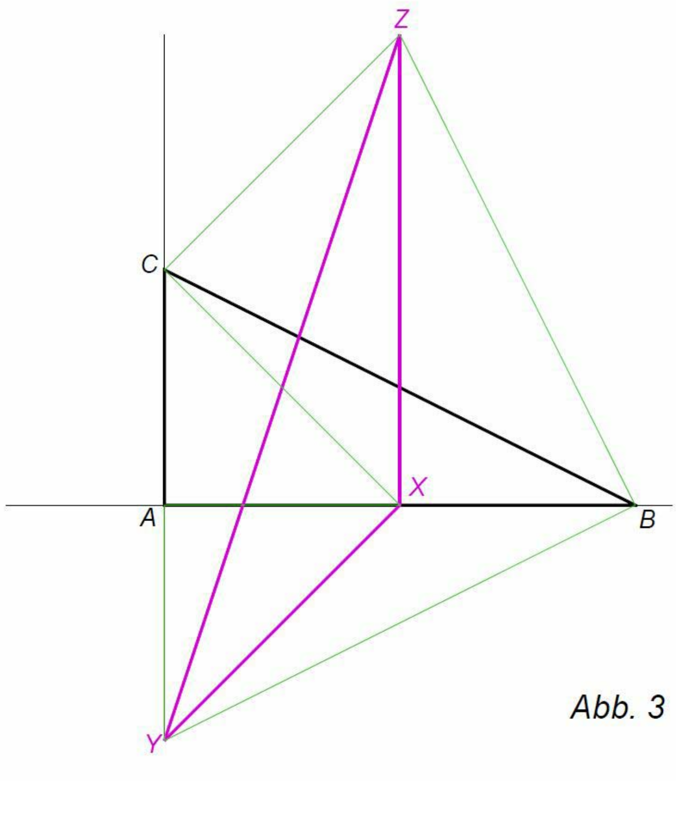

Abb. 3

ABC existiert in diesem Fall gar kein Dreieck *XYZ* so, dass *A, B* und *C* die Mittelpunkte der **äusseren** Quadrate über den Seiten des Dreiecks *XYZ* sind! Also darf das Ausgangsdreieck, dessen Ecken die Mittelpunkte der äusseren Quadrate über den Seiten eines gesuchten Dreiecks sein sollen, **nicht beliebig gewählt werden**.

Es geht nun darum, die Menge der möglichen Ausgangsdreiecke zu eruieren. Vorerst untersuchen wir nur gleichschenklige Dreiecke.

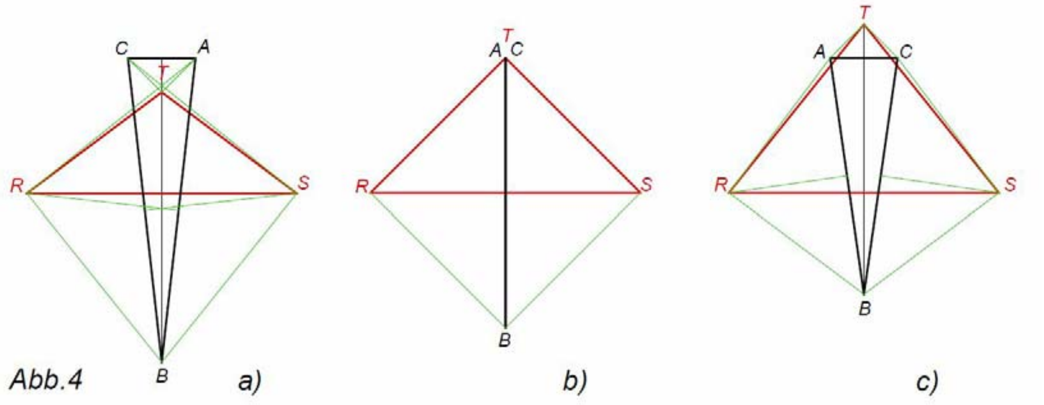

Abb.4

Die Abb.4 zeigt den Uebergang von einem Dreieck ohne Lösung (a) zu einem solchen mit Lösung c). Bei b) verkümmert das Lösungsdreieck zu einem Strich. In diesem Grenzfall ist das Ausgangsdreieck rechtwinklig. Man vermutet bereits: **das Ausgangsdreieck darf keine stumpfen Winkel enthalten.**

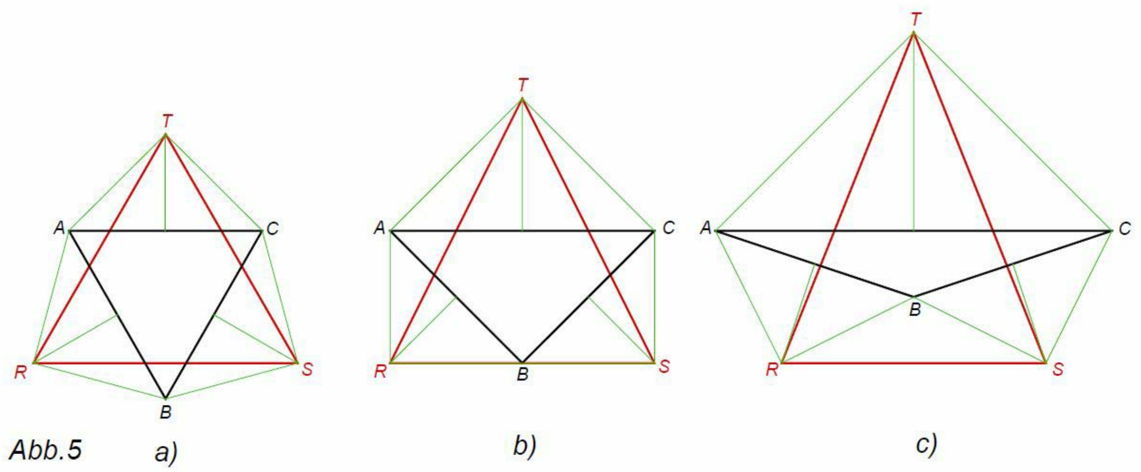

Abb.5

In der Abb.5 wird die Höhe des Ausgangsdreiecks *RST* noch weiter vergrössert. Bei a) ist *RST* gleichseitig. Diese Gleichseitigkeit überträgt sich auch auf *ABC.* Bei b) ist *ABC* rechtwinklig. Die Höhe des Ausgangsdreiecks *RST* ist gleich gross wie seine Basis $\overline{RS}$. Bei c) sieht man, dass das Dreieck *ABC* immer stumpfwinkliger wird, je höher das Ausgangsdreieck gewählt wird. Verkümmert *ABC* eventuell zu einem Strich noch bei einer endlichen Höhe des Ausgangsdreiecks *RST*? Diese Frage wollen wir rechnerisch beantworten. Wir geben den Punkten *R, S* und *T* die folgenden Koordinaten:

$$R(-1;0),\ S(1;0),\ T(0,h)$$

Und wenden die Transformation (*) an. Wir erhalten:

$$A(1-h;1),\ B(0;h-2), C(h-1;1)$$

Das Dreieck *ABC* verkümmert zu einem Strich, wenn die y-Koordinate des Punktes *B* gleich gross wird wie die y-Koordinate des Punktes *A* (oder *C*). Dies ist der Fall bei *h*=3, oder wenn die Höhe um 50% grösser ist als die Basis $\overline{RS}$. In diesem Fall ist der spitze Winkel bei *T* $2\cdot\arctan(\frac{1}{3})=36.86^o$. Wird dieser Winkel noch kleiner, so kippt die Abbildung um, wie die Abb. 6 zeigt.

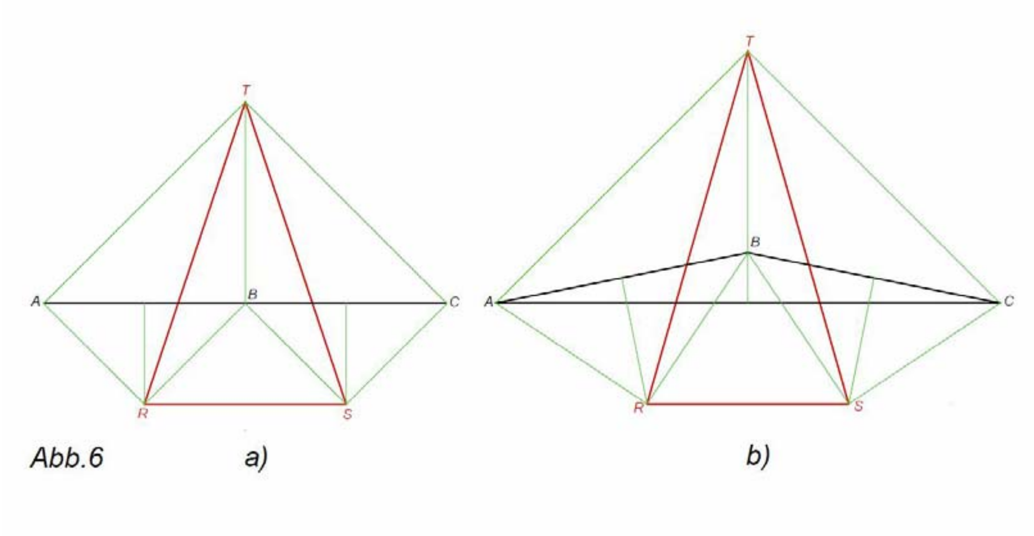

Abb.6

Bei *b)* sind *R, S* und *T* die Mittelpunkte der **inneren** Quadrate über den Seiten des Dreiecks *ABC*. Was gleichzeitig umkippt ist auch der Umlaufsinn der Eckenbezeichnungen: im Gegenuhrzeigersinn beim Ausgangsdreieck und im Uhrzeigersinn beim Lösungsdreieck.

Wir fragen uns nun, in welchem Bereich die dritte Ecke *T* des Ausgangsdreiecks *RST* bezüglich der Strecke $\overline{RS}$ liegen darf, damit es eine Lösung des Problems gibt, das ist die Existenz eines Dreiecks *ABC,* bei dem die Punkte *R, S* und *T* die Mittelpunkte der **äusseren** Quadrate über den Seiten des Dreiecks *ABC* sind.
Wir schlagen dazu den rechnerischen Weg ein und definieren die Koordinaten von *R, S* und *T* folgendermassen:

$$R(-1;0), S(1,0), T(x;y)$$

Die Abbildung (*) ergibt für *A, B* und *C* die Koordinaten

$$A(1-y;1+x),\ B(x;y-2),\ C(y-1;1-x)$$

Der Uebergang von äusseren zu inneren Quadraten erfolgt, wie wir gesehen haben dann, wenn *A,* B und *C* auf einer Linie liegen, das ist wenn $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, oder

$$\begin{pmatrix} 2y-2 \\ -2x \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} x+y-1 \\ y-x-3 \end{pmatrix}$$

Das ist der Fall, wenn $(2y-2)\cdot(y-x-3) = -2x\cdot(x+y-1)$

Wir lösen die Klammern auf und ordnen die Terme:

$$2x^2 + 2y^2 - 8y = -6$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(0;2)$ und dem Radius 1. Nur wenn die Ecke *T* im Inneren dieses Kreises liegt, gibt es eine Lösung!

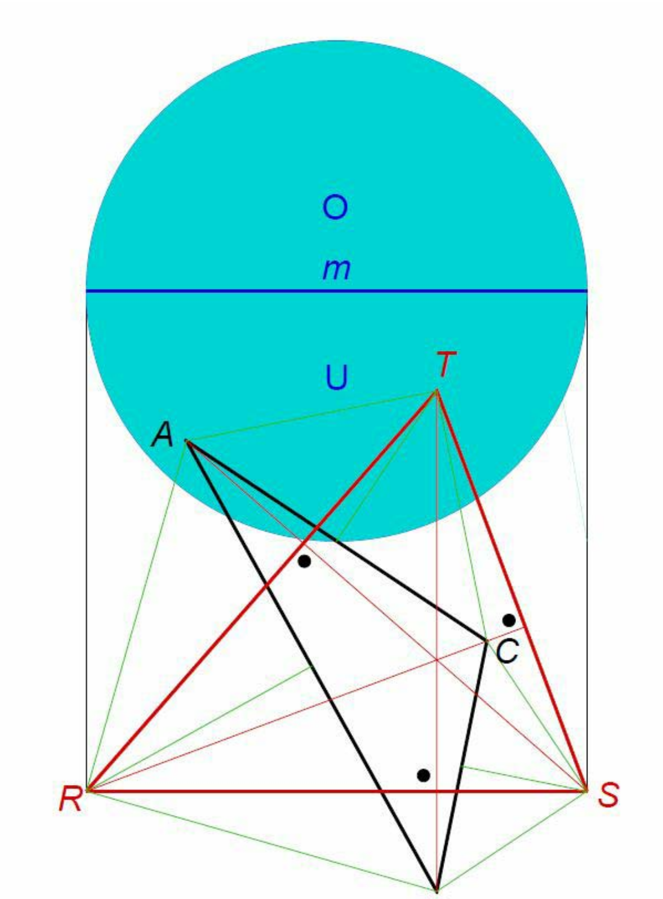

Abb. 7

Die Abb. 7 zeigt diesen Sachverhalt. Selbstverständlich gibt es einen Kreis auch symmetrisch bezüglich der Achse *RS.* Die horizontale Strecke *m*, die den Kreis in eine obere Hälfte O und eine untere Hälfte U teilt, gehört zu rechtwinkligen Dreiecken *ABC.* Das heisst: wenn die Ecke *T* auf *m* liegt, so ist das Lösungsdreieck rechtwinklig. Wenn sie in der unteren Kreishälfte U liegt, so ist das Lösungsdreieck stumpfwinklig und wenn sie in der oberen Hälfte O liegt, spitzwinklig. Der kleinstmögliche Winkel beträgt 36.86°. Wenn die Ecke *T* ausserhalb des Kreises liegt, so existiert keine Lösung. Das ist zum Beispiel für alle stumpfwinligen Audgangsdreiecke *RST.* Zu einem rechtwinkligen Ausgangsdreieck gehört eine entartete Lösung, bei der die drei Punkte *A, B* und *C* des Lösungsdreiecks auf einer Geraden liegen.

Interessant ist die Feststellung, dass die verlängerten Höhen des Ausgangsdreiecks *RST* durch die Eckpunkte *A, B* und *C* des Lösungsdreiecks verlaufen. Der Beweis sei dem Leser überlassen. Diese Tatsache erleichtert die Konstruktion mit Zirkel und Lineal wesentlich:

1. Man zeichnet die Höhen im gegebenen Dreieck *RST* und verlängert sie eventuell über die Basis hinaus.
2. Mit dem Zirkel trägt man die Basis zur jeweiligen Höhe vom Eckpunkt ab, wo die Höhe startet gegen die Basis ab und findet jeweils einen Punkt des gesuchten Dreiecks. Also $\overline{TB} = \overline{RS}, \overline{RC} = \overline{TS}, \overline{SA} = \overline{RT}$.

So einfach ist die Konstruktion! Wer hätte das gedacht?

Radolf von Salis ist pensionierter Dozent für Mathematik und Physik an der FHNW und am Gamnasium Liestal in der Schweiz.