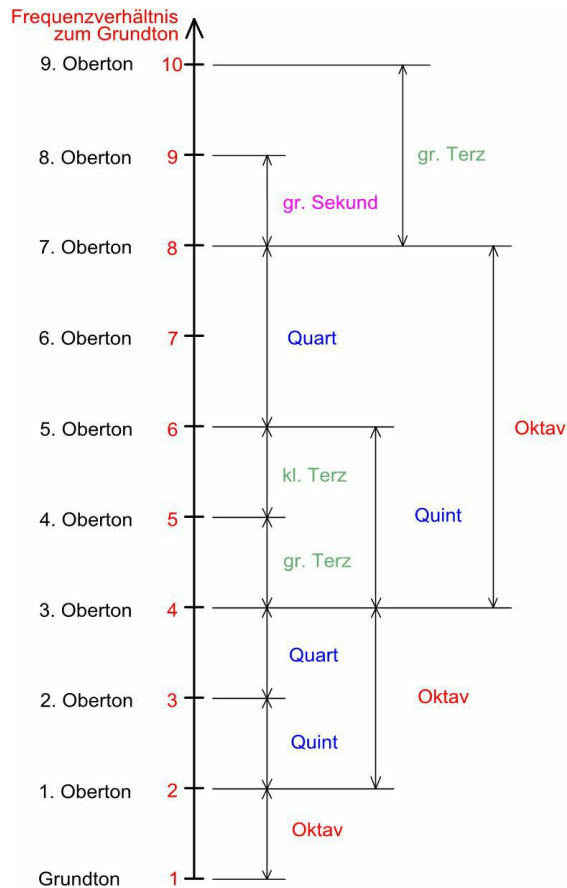


Tonleitern, Intervalle, Akkorde

Die Natürliche Tonleiter



Die Frequenzen des Grundtons und seiner Obertöne im Spektrum eines Klages stehen im Verhältnis 1 : 2 : 3 : 4 : ... Eine Tonfolge mit diesen ganzzahligen Frequenzverhältnissen wird *natürliche Tonleiter* genannt. **Hörprobe**. Die in der natürlichen Tonleiter vorkommenden Intervalle sind von der Wahl der Grundtonfrequenz unabhängig und werden *natürliche Tonintervalle* genannt.

Als Tonintervall bezeichnet man ein bestimmtes *Frequenzverhältnis*.

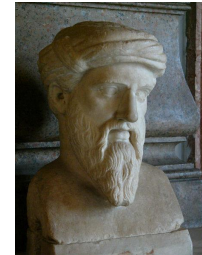
- 2 : 1 → Oktav
- 3 : 2 → Quint
- 4 : 3 → Quart
- 5 : 4 → grosse Terz
- 6 : 5 → kleine Terz
- 9 : 8 → grosse Sekund
- 8 : 5 → kleine Sext
- 5 : 3 → grosse Sext

Quint und Quart ergänzen sich zu einer Oktav.
 Grosse und kleine Terz ergänzen sich zu einer Quint.
 Quart und kleine Terz ergänzen sich zu einer kleinen Sext.
 Quart und grosse Terz ergänzen sich zu einer grossen Sext.

Natürliche Tonintervalle mit kleinzahligem Frequenzverhältnis klingen besonders "schön". Diese Art von Schönheit liegt in der Natur verwurzelt.

Der Quintenzirkel

Der griechische Philosoph und Mathematiker Pythagoras von Samos, der um 550 vor Christus lebte, erforschte die Tonintervalle auf einem Monochord. Das ist ein Saiteninstrument mit einer einzigen Saite. Halbiert man die Saitenlänge, so erhält man einen Ton, der um eine Oktav höher klingt. Drittelt man die Saitenlänge, so erhält man einen Ton, der um eine Oktav und eine Quint höher klingt als der Ausgangston. Das längere Saitenstück klingt eine Oktav tiefer als das kürzere und eine Quint höher als der Ton, den die ungekürzte Saite erzeugt.



Diesen längeren Saitenstück kann man wieder dritteln. Dadurch erhält man nochmals einen neuen Ton. Notfalls muss der neue längere Stück verdoppelt werden, falls er kürzer als die halbe Saite ist.

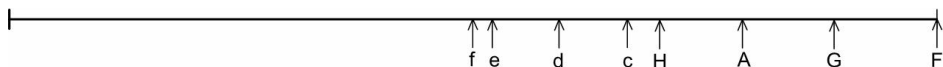


Das Verfahren lässt sich beliebig fortsetzen und liefert immer wieder neue Töne innerhalb der Oktave über dem Ton der

ungekürzten Saite. Diese Folge von Tönen heisst **Quintenzirkel**.

Tonbezeichnung	Saitenlänge
F	1
c	$\frac{2}{3}$
G	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{8}{9}$
d	$\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$
A	$\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} \cdot 2 = \frac{64}{81}$
e	$\frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$
H	$\frac{2}{3} \cdot \frac{128}{243} \cdot 2 = \frac{512}{729}$
Fis	$\frac{2}{3} \cdot \frac{512}{729} \cdot 2 = \frac{2048}{2187} = 0.936 \approx 1$

Nach 7 Schritten erreicht man wieder einen Ton, der relativ nahe beim Ausgangston liegt. Bricht man deshalb ab, so erhält man die noch heute gebräuchliche **diatonische Tonleiter** C D E F G A H (c), allerdings nicht exakt in der heute üblichen Stimmung, wie die **Hörprobe** zeigt. Die nach dem Quintenzirkel eingeteilte Saite sieht folgendermassen aus:



Angeschlagen wird sie auf der linken Seite. Man erkennt die "halben Töne" zwischen H und c und zwischen e und f. Pythagoras gab sich nicht mit 7 Tönen zufrieden. Er führte den Quintenzirkel wie folgt weiter:

Tonbezeichnung	Saitenlänge
Fis	$\frac{2048}{2187}$
cis	$\frac{2048}{2187} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4096}{6561}$
Gis	$\frac{4096}{6561} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{16384}{19683}$
dis	$\frac{16384}{19683} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32768}{59049}$
B	$\frac{32768}{59049} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{131072}{177147}$
f	$\frac{131072}{177147} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{524288}{531441} = 0.9865 \approx 1$

Obwohl die Zahl $\frac{524288}{531441}$ nicht exakt 1 ist, sondern um 1.35 % davon abweicht, bricht Pythagoras hier ab und erhält so 5 neue Töne, die in Ergänzung zu den 7 von vorher eine Tonleiter mit **12 Tönen** ergibt. Man bezeichnet sie als **Pythagoräische Tonleiter**. Der Fehler von 1.35% heisst **Pythagoräisches Komma**. Die Schritte zwischen den einzelnen Tönen der pythagoräischen Tonleiter sind ziemlich regelmässig, wie die **Hörprobe** und das nachfolgende Bild einer nach Pythagoras eingeteilten Saite bezeugen.



Die 5 neuen roten Markierungen entsprechen den schwarzen Tasten eines Klaviers.

Die Wurzeln unserer heutigen Tonleiter sind also mehr als 2500 Jahre alt!

Die **Grund-Bässe** und die **Terz-Bässe** in einem **Akkordeon mit Standard-Basswerk** sind nach dem Quintenzirkel angeordnet:

Eselsbrücke:

Von **C** nach rechts (oben): *Geh Du Alter Esel Hole ...*

Von **C** nach links (unten): *Frische Birnen Essen Alte Damen Gern*

E^b B F C G D A E H F# C# G# D# B F C
 C^b G^b D^b A^b E^b B F C G D A E H F# C# G#

Die chromatische Tonleiter



Die Pythagoräische Tonleiter hatte ihre Macken. Trotzdem wurde bis zum Mittelalter auf dieser Tonleiter musiziert. Eine reine grosse Terz ist ein Intervall zwischen 2 Tönen, dessen Frequenzen sich wie 5 : 4 verhalten. Die Frequenzen verhalten sich umgekehrt wie die entsprechenden Saitenlängen auf dem Monochord. Man entdeckt schnell, dass ein Intervall von 4 Halbtönen auf der Pythagoräischen Tonleiter etwa eine grosse Terz ergibt. 3 Halbtöne ergeben etwa eine reine kleine Terz, 7 Halbtöne exakt eine reine Quint und 5 Halbtöne exakt eine reine Quart, allerdings mit einer einzigen Ausnahme, die auf das Pythagoräische Komma zurückzuführen ist.

Grundton	kl. Terz	gr. Terz	Quart	Quint
C	1,2656	1,2014	1,3333	1,5000
C#	1,2486	1,1852	1,3333	1,5000
D	1,2656	1,1852	1,3333	1,5000
D#	1,2486	1,1852	1,3333	1,5000
E	1,2656	1,1852	1,3333	1,5000
F	1,2656	1,2014	1,3333	1,5000
F#	1,2656	1,1852	1,3515	1,5000
G	1,2656	1,2014	1,3333	1,5000
G#	1,2486	1,1852	1,3333	1,5000
A	1,2656	1,1852	1,3333	1,5000
B	1,2486	1,1852	1,3333	1,4798
H	1,2656	1,1852	1,3333	1,5000

Die Tabelle führt alle Terzen, Quarten und Quinten über dem Grundton in der Pythagoräischen Tonleiter auf. Man erkennt darin:

Die unreine Quint hat ein Frequenzverhältnis von $\frac{262144}{177147} = 1.4798$ und ist um 1.35% (Pythagoräisches Komma) zu klein, während die unreine Quart um 1.35% zu gross wird. Es treten zwei verschiedene Arten von Terzen auf: 8 um 1.25% zu grosse und 4 um 0.11% zu kleine grosse Terzen. Von den kleinen Terzen sind 9 um 1.25% zu klein und 3 um 0.11% zu gross.

Im Mittelalter suchte man nach Stimmungen mit 12 Halbtönen, die sowohl reine Quinten und Quarten, als auch reine Terzen enthielten. Alle Intervalle konnte man allerdings nie bereinigen. Die verbliebenen unreinen Intervalle waren so unrein, dass man sie als "Wölfe" verschrte. Komponisten mussten in ihren Kompositionen diese Wölfe vermeiden. Von Transponieren in eine andere Tonart konnte nie die Rede sein. Das Blatt wendete sich mit der Aufklärung. Nicht nur Musiker und Instrumentenbauer, sondern auch namhafte Mathematiker begannen sich mit musikalischen Tonleitern zu befassen (Pythagoras sei gegrüsst). Wohl aus jener Zeit stammt die heute noch weit verbreitete Meinung, dass musikalische und mathematische Begabung verwandt seien. Der Basler Mathematiker [Leonhard Euler](#) (Portrait links), der von 1707 bis 1783 lebte und hauptsächlich in St. Petersburg wirkte, bewies, dass es nicht möglich ist, gleichzeitig mehr als 8 Terzen und 9 Quinten zu bereinigen und schlug folgenden Kompromiss vor:

1. Einzig die Oktav soll rein bleiben (2:1)
2. Alle Halbtöne der neuen 12 - stufigen Tonleiter sollen gleich unrein sein.

Dies führt zu einem Frequenzverhältnis von $\sqrt[12]{2} : 1$ für ein beliebiges Paar von direkt aufeinander folgenden Halbtönen der neuen Tonleiter. Ein Intervall von k Halbtönen bekommt ein Frequenzverhältnis von $\sqrt[12]{2^k} : 1$.

Die so definierte Tonleiter heisst *chromatische Tonleiter*. Man spricht auch von *wohltemperierter Stimmung*.

Ton	Chrom	Pyth
c'	261,6	260,7
c#'	277,2	278,4
d'	293,7	293,3
d#'	311,1	313,2
e'	329,6	330,0
f'	349,2	347,7
f#'	370,0	371,3
g'	392,0	391,1
g#'	415,3	417,7
a'	440,0	440,0
b'	466,1	469,9
h'	493,9	495,0
c''	523,3	521,5

Heute wird die Frequenz des Kammertons a' zu 440.0 Hz normiert. Die Tabelle links zeigt die Frequenzen einer auf diesem Ton normierten chromatischen Tonleiter und im Vergleich dazu die Frequenzen für eine entsprechende Pythagoräische Tonleiter. Die Unterschiede sind deutlich sichtbar.

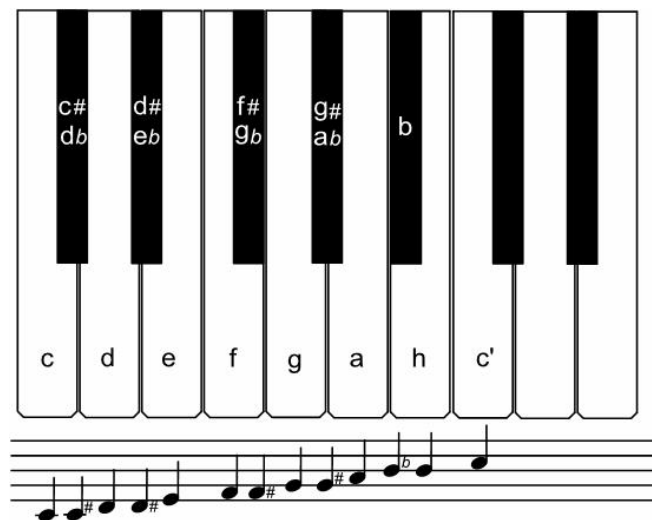
In der chromatischen Tonleiter erhält man folgende Intervalle:

Intervall Bezeichnung	Anzahl Halbtöne	Frequenz Verhältnis	Rein	Abw. Cents
kl. Sekund	1	1,05946	-	-
gr. Sekund	2	1,12246	1,12500	-3.9
kl. Terz	3	1,18921	1,20000	-15.6
gr. Terz	4	1,25992	1,25000	+13.7
Quart	5	1,33484	1,33333	+2
Tritonus	6	1,41421	-	-
Quint	7	1,49831	1,50000	-2
kl. Sext	8	1,58740	1,60000	-13.7
gr. Sext	9	1,68179	1,66667	+15.6
kl. Septim	10	1,78180	-	-
gr. Septim	11	1,88775	-	-
Oktav	12	2,00000	2,00000	0

Vor allem sind in der chromatischen Tonleiter alle Terzen und Sexten ziemlich unrein, und das Musizieren auf dieser Tonleiter bereitete dem auf reine Intervalle gewöhnten Ohr grosse Mühe. Johann Sebastian Bach, der von 1685 bis 1750 in Leipzig lebte, trug mit seinem Werk "Das wohltemperierte Klavier" wesentlich dazu bei, dass die "neue" Stimmung Verbreitung fand. Man kann in der chromatischen Tonleiter beliebig transponieren, und dem Komponisten werden nirgends "Wölfe" in den Weg gestellt. Wenn man von mathematischer Begabung bei einem Musiker spricht, so trifft dies für Bach eindeutig zu. Seine Kompositionen, vor allem die Fugen, sind echte mathematische Kunstwerke.

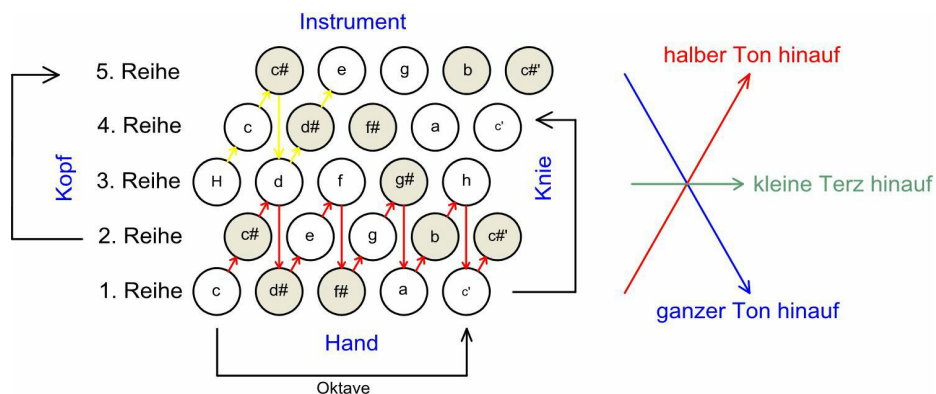
Klaviaturen

Das *Akkordeon mit Klaviertastatur* verwendet für das Spiel mit der rechten Hand eine normale Klaviertastatur mit bis zu 41 Tasten. Der Tonumfang beträgt demnach 3 bis 4 Oktaven. Die Anordnung der Tasten ist wohlbekannt. Das zugehörige Notenbild ist das traditionelle, das heute für sämtliche Instrumente verwendet wird. Das Transponieren in andere Tonarten verändert die zu verwendenden Griffe und kann nur von sehr geübten Akkordeonspielern aus dem Stegreif ausgeführt werden.



Die *chromatische Handharmonika* verwendet Knöpfe anstelle von Tasten. Mancher erschrickt vor der beachtlichen Anzahl Knöpfe, die so ein Instrument aufweist. Es sind bis zu 87 und mehr Knöpfe allein für das Spiel mit der rechten Hand. Diese Knöpfe sind meistens in 5 Reihen angeordnet, aber nur 3 Reihen sind voneinander unabhängig. 2 Reihen sind Wiederholungen von anderen. Sehr alte Instrumente hatten nur die 3

Hauptreihen, französische Instrumente besitzen meistens nur eine Wiederholungsreihe, slavische Instrumente hingegen bis zu 3. Der Stimmumfang einer grossen chromatischen Handharmonika beträgt mehr als 4 Oktaven. Bei allen chromatischen Handharmonikas ist aber das Grundsche ma für die Tastatur gleich und so genial, dass selbst Johann Sebastian Bach davon begeistert gewesen wäre. Hier wird ein Ausschnitt gezeigt:



Die chromatische Tonleiter ist rot eingezeichnet. Schon mit relativ wenig Übung kann diese schnell gespielt werden. Verwendet man die 2., 3. und 4. Reihe, so geht es exakt nach demselben Muster halbtö nweise hinauf. Auch auf der 3., 4. und 5. Reihe ist es so (gelb eingezeichnet). Man kann (und man sollte) sich beim Spiel auf die Verwendung von ausschliesslich 3 Reihen beschränken. Dann kann man *ohne Veränderung der Griffe in jede beliebige Tonart transponieren*.

Bei einer schnellen Tonfolge ist das Überspringen von einer Knopfreihe etwas schwierig. Viele Spieler erleichtern sich diese Passagen durch die Mitverwendung der 4. Reihe. Deshalb haben französische Instrumente, auf denen Musette gespielt wird, 4 Knopfreiheiten. Transpositionen ohne Griff-

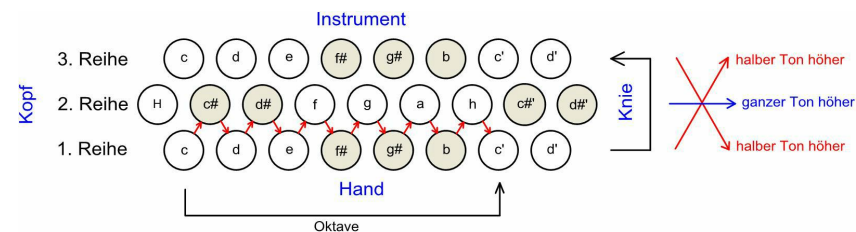


wechsel sind dann nur jeweils in Schritten von einer kleinen Terz möglich. Hat man auf dem Instrument hingegen noch eine 6. Knopfreihe (Wiederholung der 3. Reihe), so kann man auch Passagen über 4 Knopfreiheiten beliebig ohne Griffänderung transponieren.

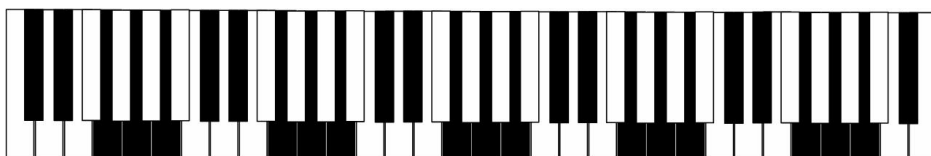
Es gibt eigentlich 2 verbreitete Typen von chromatischen Tastaturen: die *B-Griff* und die *C-Griff* - Tastatur. In der Abbildung links ist der C-Typ gezeigt. Dieser ist in der Schweiz und in Italien sehr verbreitet, weit mehr als der B-Typ, der vor allem in Skandinavien und in den slavischen Ländern anzutreffen ist. Der Unterschied ist bloss durch eine Spiegelsymmetrie gegeben. Auf der C-Griff - Tastatur geht es in einer schrägen Knopfreihe von links unten nach rechts oben in Schritten von Halbtönen hinauf. Hingegen von links oben nach rechts unten geht es in Schritten von ganzen Tönen (blauer Pfeil in der Abbildung) hinauf. Bei der B-Griff - Tastatur ist es genau umgekehrt.

Von Heinrich Josef Vincent und später von *Paul von Janko* wurde bereits im 19. Jahrhundert eine Tastatur vorgeschlagen, die sich nie richtig durchsetzen konnte, aber in diesem Zusammenhang erwähnenswert ist. Es existierte sogar ein US Patent mit der Nummer 6566593, das diese Erfindung schützte.

Die Janko-Tastatur beruht auf dem gleichen Prinzip wie die oben beschriebene chromatische Handharmonikatastatur, verteilt jedoch die Töne auf bloss 2 anstatt 3 Hauptreihen und weist eine 3. Reihe auf, welche die Kopie der ersten ist.



Von Vorteil bei dieser Tastatur ist die Knopfnähe. Nie muss man eine Reihe überspringen. Man kann darauf auch beliebig Transponieren, ohne die Griffe ändern zu müssen. Der Nachteil liegt wohl darin, dass eine Oktave 6 anstelle von bloss 4 Knöpfen umfasst. Bei der normalen Klaviertastatur sind es 7 Tasten. Eine grosse chromatische Handharmonika dieses Typs könnte gut 4 Oktaven fassen. Die Konstruktion eines Instrumentes mit dieser Art von Tastatur würde sich etwas einfacher gestalten als bei einer gewöhnlichen chromatischen Handharmonika. Auch sollte dabei Gewicht eingespart werden können. Trotz der vielen Vorteile, hat der Autor noch nie ein solches Instrument zu Gesicht bekommen. Ein Klavier, das dieselbe Idee verwirklicht, müsste eine Tastatur wie die folgende aufweisen:



Griffnotation

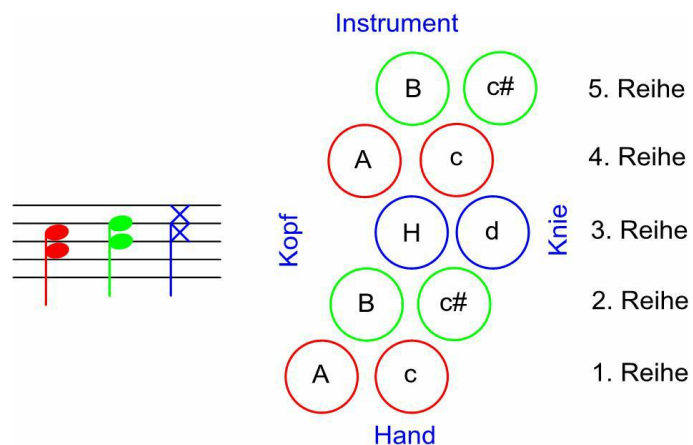
Akkordeonisten, die ein chromatisches Instrument spielen, verwenden dieselben Partituren, wie ihre Kollegen mit der Klaviertastatur. In den Lehrbüchern findet man massenhaft langweilige Geläufigkeitsübungen für alle möglichen Tonarten. Dies macht wohl für ein Instrument mit Klaviatur Sinn, denn bei jeder Tonart sind die Griffe verschieden. Nicht aber bei einer chromatischen Handharmonika. Es wäre dort viel sinnvoller ein *Notenbild zu verwenden, welches die transponierinvarianten Eigenschaften des Instruments berücksichtigt.*

Bei diatonischen Instrumenten (siehe [S 55-62](#)) verwendet man seit vielen Jahren *Griffnotationen*. Aus der Stellung der



Note im Notenbild kann man sehr direkt auf die zu drückende Taste schliessen. Akkordeonlehrer sind einhellig der Meinung, dass dadurch das Erlernen des Spiels auf einem diatonischen Instrument wesentlich einfacher sei als auf einem chromatischen, obwohl bei einer diatonischen Handharmonika noch auf Zug und Druck geachtet werden muss. Ich habe diese Erfahrung selbst gemacht. Zu meinem sechsten Geburtstag schenkte mir mein Vater eine graue Hohner Sirena, die so gross war, dass ich nicht darüber hinweg sehen konnte. Trotzdem lernte ich durch reines Abtasten und völlig autodidaktisch einfache Lieder darauf zu spielen. Mein Vater war Lehrer und Landwirt. Damals war der Lehrer in einem Bündner Dorf selbstverständlich auch Chordirigent und Organist. So kam ich sehr früh mit Notenmaterial in Kontakt. Ich wollte lernen, wie man diese Notenbilder auf mein Akkordeon, auf das ich natürlich sehr stolz war, übertragen konnte. In der Schule wurde noch Musikunterricht hoch geschrieben. Wir lernten schon sehr früh ohne Instrumentenbegleitung ab Noten singen, entdeckten die Schönheit des mehrstimmigen Gesangs (nur die besten durften die zweite Stimme singen!) und lernten die Bedeutung von Kreuzen und Bes. Es war aber trotzdem enorm mühsam, das auf den Blättern mit der grossen Aufschrift "Walter Wild" enthaltene Notenbild auf mein Instrument zu übertragen, auch wenn ich unterdessen über die Tastatur hinweg sehen konnte. Damals begann die Stadt Zürich die Bergeller Kraftwerke mit der riesigen Staumauer Albigna zu bauen. Der Chefsingenieur wohnte im Haus meiner Grossmutter und hatte einen Sohn namens Peter, der drei Jahre älter war als ich und herrlich Handorgel spielte. Sein Instrument sah viel einfacher aus als meines, hatte nur 8 Bässe und nur 3 Knopfreihe für die rechte Hand. Beim Ziehen tönte es nicht gleich wie beim Stossen. Auch die Notenblätter waren nur halb so gross wie meine. Peter zeigte mir, wie das mit seinem diatonischen Instrument funktionierte, und schon nach wenigen Tagen konnte ich auf seiner Hohner Norma fast besser spielen als auf meiner chromatischen Hohner Sirena. Von diesen Erfolgserlebnissen beflügelt, bat ich meinen Vater so lange, bis er die Sirena gegen eine diatonische Handharmonika eintauschte. Die Firma Acker-

mann in Zürich sandte mir eine neue rote Hohner Norma III und noch 100 Fr. dazu. Im Begleitbrief hiess es: "schade, dass sie diesen Entschluss gefasst haben!" Mit den 100 Fr. kaufte ich Notenmaterial und lernte in kurzer Zeit fast direkt ab Blatt zu spielen. Das Erfolgserlebnis war überwältigend. Später hatte ich andere Interessen und die Norma III verstaubte in einem Schrank. Als 1995 mein Vater starb, kaufte ich zu seinem Andenken eine chromatische Handharmonika und begann wieder darauf zu spielen. Aber ich hatte wie 50 Jahre davor Mühe, das Notenbild auf die Tastatur zu übertragen. Ich begann, die Noten in eine Griffnotation umzuwandeln, vorerst mühsam von Hand. Später verwendete ich das Notenprogramm Capella, das durch eigene Scripts ergänzt werden kann. Ich schrieb das Script "Chromatic Griff", das durch Mausclick aus einem normalen Notenbild ein Griffbild herstellt. Das Prinzip ist sehr einfach: der ersten und der dritten Knopfreihe ordnet man Noten zu, die zwischen den Linien stehen. Zur zweiten Knopfreihe gehören Noten auf den Linien. Um die Noten der dritten Reihe von denjenigen der 1. Reihe zu unterscheiden, markiert man erstere mit einem Kreuz. Bei diatonischen Instrumenten sind das die "Kreuztöne".



Das Notenbild wird dadurch zu einem Griffbild. Nach wenig Übung beherrscht man bereits die einfache Abbildung von der Note auf die Tastatur. Beim Transponieren muss man das Notenbild nicht ändern, weil die Griffe dieselben bleiben. Nur erfolgen diese Griffe in einer anderen "Region" der Tastatur. Viele chromatische Instrumente weisen eine völlig weisse Tastatur auf. Die "schwarzen Tasten" werden durch ein Pünktchen auf dem entsprechenden Knopf gekennzeichnet. Dieses Pünktlein sieht man nur von oben. Aber ob der Knopf ein Pünktlein aufweist oder nicht ist ja völlig egal, denn die Griffe bleiben beim Transponieren invariant! Auf der nächsten Seite wird der Unterschied zwischen normalen Noten und Griffnoten gezeigt.

Es ist denkbar, dass man auch für die Janko-Tastatur eine Griffnotation entwickeln könnte. Noten zwischen den Linien müsste man der 1. Knopfreihe zuordnen, solche auf den Linien hingegen der zweiten Knopfreihe. Kreuznoten wären nicht notwendig. Allerdings wären 5 Notenlinien etwas knapp,



da sich das Notenbild wegen der Nichtverwendung von Vorzeichen in der Höhe dehnt. Man könnte aber beispielsweise 9 Notenlinien mit einer markanteren mittleren Linie verwenden:

Der Vorteil dieser Notation wäre gewiss die völlige Unabhängigkeit von Tonarten. Jeder Akkord hätte immer ein identisches Bild, aus dem er mit einer gewissen Übung wie die Buchstaben des Alphabets identifiziert werden könnte. Der Nachteil wäre vielleicht die Unübersichtlichkeit, aber der Musikunterricht würde sich markant vereinfachen.

S' Härz am rächte Fläck

René Wicky

Walzer

Musical score for piano, featuring a melody line and a bass line with chords. The key signature is B-flat major (two flats) and the time signature is 3/4. The score includes first and second endings, a Trio section, and dynamic markings such as *f* and *fz*. Chords are indicated by letters: B, F7, Gm, C7, FCA, F, Cm, B7, Es, and B.

S' Härz am rächte Fläck

René Wicky

Walzer

Griffnoten

Musical score for guitar, featuring a melody line and a bass line with fretted notes (marked with 'x'). The key signature is B-flat major (two flats) and the time signature is 3/4. The score includes first and second endings, a Trio section, and dynamic markings such as *f* and *fz*. Chords are indicated by letters: B, F7, Gm, C7, FCA, F, Cm, B7, Es, and B.